*/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$

$=f'(2)$ avec $f(x)=\ln x$

$\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

ou bien : posons $X=x-2$

$\Rightarrow x=X+2$

$\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{X}{2}+1\right)}{X}$ Posons $t=\dfrac{X}{2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}\times\dfrac{1}{2}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

*/ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}$

$=f'(e)$, avec $f(x)=\ln x$

$=\dfrac{1}{e}$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{x\ln x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{1}{0^+}+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|}{|x-1|}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Exercice 8

$f(x)=x-1-\ln x,\ x\in\ ]0,+\infty[$.

$g(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x},\ x\in\ ]0,+\infty[$.

1/ $\otimes\ f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

$\otimes\ g(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

2) */ f est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout $x>1$: $f(x)\succ f(1)\Rightarrow f(x)\succ 0$

$\Rightarrow x-1-\ln x\succ 0\Rightarrow \ln x\prec x-1$. (1)

*/ g est croissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout

$x>1$: $g(x)\succ g(1)\Rightarrow g(x)\succ 0$

$\Rightarrow \ln x-\dfrac{x-1}{x}\geq 0\Rightarrow \ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$. (2)

(1) et (2) donne : $\forall x>1\ \ \dfrac{x-1}{x}\prec\ln x\prec x-1$

Exercice 9

$x\mapsto\begin{cases}f(x)=2x-x\ln|x|;x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) */ continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x-x\ln x=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x-x\ln(-x)$

(Posons $X=-x$)